UNIVERSIDAD SIMON BOLIVAR
Departamento de Matemáticas
Puras y Aplicadas.

**MA1112 ABRIL-JULIO DE 2006**
**tercer examen parcial (40%)**
**11-07-2006**

## TIPO C

## JUSTIFIQUE TODAS SUS RESPUESTAS

**1.-** Calcule las siguientes integrales :

**a)( 10 ptos.)** $\int \frac{x^3-5x^2+6x+1}{x^2 - 5x+6}\,dx$ ; **b)( 5 ptos.)** $\int \frac{\ln(3.x^5)}{x}dx$ ;

**c)( 5 ptos.)** $\int \text{sen}(\sqrt{x})\,dx$ ; **d)( 5 ptos.)** $\int_4^5 \frac{dx}{\sqrt[3]{x-4}}$ .

**2.-( 5 ptos.)** Calcule el siguiente límite : $\lim\limits_{x\to 1} x^{1/(1-x)}$.

**3.- ( 10 ptos.)** Considere el volumen del sólido de revolución que se genera cuando la figura plana, del primer cuadrante, limitada por las dos curvas de ecuaciones :
$y = 4x^2$ , $y = x^2+3$ y por el eje y , gira alrededor del eje y
**3a)** (4 ptos.) **Represente** el volumen descrito **usando integrales**, con el método de discos y/o arandelas ;
**3b)** (4 ptos.) **Represente** el volumen descrito **usando integrales**, con el método de **l**os cascarones ;
**3c)** (2 ptos) Calcule el volumen [ con el método que Usted prefiera].

## S O L U C I O N E S

**a)( 10 ptos.)** $\mathbf{I}_a = \int \frac{x^3-5x^2+6x+1}{x^2 - 5x+6}\,dx$ ;

Dividiendo el polinomio $x^3-5x^2+6x+1$ por : $x^2 - 5x+6$ se obtiene :
cociente = x , resto = 1 , por lo cual $\frac{x^3-5x^2+6x+1}{x^2 - 5x+6} = x + \frac{1}{x^2 - 5x+6}$ .

Además, como $x^2 - 5x+6 = (x-3)(x-2)$ :

$$\frac{1}{x^2-5x+6} = \frac{A}{x-3} + \frac{B}{x-2} = \frac{A(x-2)+B(x-3)}{x^2-5x+6}$$ por lo cual se tiene :

$1 = A(x-2)+B(x-3)$ ; $x=3 \Rightarrow A = 1$ ; $x=2 \Rightarrow B = -1$ ;

$$\mathbf{I_a} = \int x\,dx + \int \left(\frac{1}{x-3} - \frac{1}{x-2}\right)dx = \frac{x^2}{2} + \ln|x-3| - \ln|x-2| = \frac{x^2}{2} + \ln\left|\frac{x-3}{x-2}\right| + K .$$

**b)( 5 ptos.)** $\mathbf{I_b} = \int \frac{\ln(3.x^5)}{x}dx = \int \frac{\ln(3)+5.\ln(x)}{x}dx = \ln(3).\ln(x) + \frac{5}{2}(\ln(x))^2 + K$ .

**c)( 5 ptos.)** $\mathbf{I_c} = \int \operatorname{sen}(\sqrt{x})\,dx$ ; pongamos $u = \sqrt{x}$ . Entonces $x = u^2$, $dx = 2u.du$ ;

$\mathbf{I_c} = \int 2u.\operatorname{sen}(u)du \underset{\text{(por partes)}}{=} -2u.\cos(u) + \int 2.\cos(u)du = -2u.\cos(u)+2.\operatorname{sen}(u) =$

$= -2\sqrt{x}\cos(\sqrt{x}) + 2.\operatorname{sen}(\sqrt{x}) + K$ .

**d)( 5 ptos.)** $\mathbf{I_d} = \int_4^5 \frac{dx}{\sqrt[3]{x-4}}$ . [ **ojo : es una integral impropia**] .

$$\mathbf{I_d} = \lim_{b\to 4^+} \int_b^5 \frac{dx}{\sqrt[3]{x-4}} = \lim_{b\to 4^+}\left[\frac{3}{2}(x-4)^{2/3}\right]_b^5 = \lim_{b\to 4^+}\frac{3}{2}\left[(5-4)^{2/3} - (b-4)^{2/3}\right] = \frac{3}{2} .$$

La integral impropia dada es convergente y su valor es $\frac{3}{2}$ .

**2.-( 5 ptos.)** $\lim_{x\to 1} x^{1/(1-x)} = L$ ;

$\ln(L) = \lim_{x\to 1}\frac{\ln(x)}{1-x} \underset{\text{(Hopîtal)}}{=} \lim_{x\to 1}\frac{1/x}{-1} = -1$ , luego $L = e^{-1} = \frac{1}{e}$ .

**3.- ( 10 ptos.)** Considere el volumen del sólido de revolución que se genera cuando la figura plana, del primer cuadrante, limitada por las dos curvas de ecuaciones :
$y = 4x^2$ , $y = x^2+3$ y por el eje y , gira alrededor del eje y
**3a)** (4 ptos.) **Represente** el volumen descrito **usando integrales**, con el método de discos y/o arandelas ;

Considerando los puntos A(1, 4) , B(0, 3) y con referencia a la figura #5 se tiene :

$$V = \pi\int_{y_O}^{y_A}(R^2-r^2)\,dy = \pi\int_{y_O}^{y_B}(R^2-r_1^2)\,dy + \pi\int_{y_B}^{y_A}(R^2-r_2^2)\,dy ,$$

con $R = \frac{\sqrt{y}}{2}$ ; si $0 \le y \le y_B = 3$ se tiene $r = r_1 = 0$, si $3 \le y \le y_A = 4$ se tiene $r = r_2 = \sqrt{y-3}$ ;
por lo tanto :

$$V = \pi \int_{y_O}^{y_A} (R^2 - r^2)\,dy = \pi \int_{y_O}^{y_B} (R^2 - r_1^2)\,dy + \pi \int_{y_B}^{y_A} (R^2 - r_2^2)\,dy =$$

$$= \pi \int_O^3 \left[\left(\frac{\sqrt{y}}{2}\right)^2 - 0^2\right] dy + \pi \int_3^4 \left[\left(\frac{\sqrt{y}}{2}\right)^2 - (\sqrt{y-3})^2\right] dy =$$

$$= \pi \int_O^3 \frac{y}{4}\,dy + \pi \int_3^4 \left[\frac{y}{4} - (y-3)\right] dy = \pi \int_O^4 \frac{y}{4}\,dy - \pi \int_3^4 (y-3)\,dy .$$

**3b)** (4 ptos.) **Represente** el volumen descrito **usando integrales**, con el método de **l**os cascarones ;

Con referencia a la figura #6 se tiene : $V = 2\pi \int_{x_O}^{x_A} (y_2 - y_1) r\,dx$ , con $y_1 = 4x^2$, $y_2 = x^2 + 3$ ,
$r = x$ , $x_O = 0$ , $x_A = 1$ , por lo cual se tiene :

$$V = 2\pi \int_0^1 [((x^2+3) - 4x^2).x]\,dx = 2\pi \int_0^1 (3 - 3x^2).x\,dx = 2\pi \int_0^1 (3x - 3x^3)\,dx .$$

**3c)** (2 ptos) Calcule el volumen [ con el método que Usted prefiera].

**3ca)** Calculando el volumen con el método de discos y/o arandelas se tiene :

$$V = \pi \int_O^4 \frac{y}{4}\,dy - \pi \int_3^4 (y-3)\,dy = \pi \left[\frac{y^2}{8}\right]_0^4 - \pi \left[\frac{(y-3)^2}{2}\right]_3^4 = \pi \left[2 - \left(\frac{1}{2} - 0\right)\right] = \frac{3}{2}\pi .$$

**3cb)** Calculando el volumen con el método de los cascarones se tiene :

$$V = 2\pi \int_0^1 (3x - 3x^3)\,dx = 2\pi \left[\frac{3x^2}{2} - \frac{3x^4}{4}\right]_0^1 = \frac{3}{2}\pi .$$